

## 確率論入門 「くせ者は色のついたボールです」

コイン投げの実験とサイコロ振りの実験については既に触れました。この 2 つはどの参考書でも典型的な例として取り上げられていますし、コインの枚数やサイコロの個数が多くなければ簡単な問題だといえます。最近、流行りだしている SPI2 という就職の試験問題でも出題されるほどです。

しかし、これらに加えて、これから紹介するような例題も大学受験などに多く出題されていると思います。それだけ重要というか基本的なことなわけです。

**例題** 中の見えない袋の中に同じ形状で同じ重さの赤玉、白玉、黒玉がそれぞれ1個ずつ入っています。袋の中にある異なる 3 つの玉を無作為に 2 つ取り出すとき、以下の問に答えなさい。ただし、最初に取った玉は色を確認した後に袋の中に戻すこととする。

- 1) 2 つの玉を取り出すという試行に対して生じる結果の数は？
- 2) 取り出した玉の色が赤と黒である確率は？

**解説** まずは 1) について考えてみましょう。これは要するに「3 つの面で構成されたサイコロを 2 回振る実験」と考えればよいのです。つまり、1 回目に 3 面のサイコロを振ったときに生じる結果と 2 回目に生じる結果を考えればよいということです。

1 回目 … 赤、白、黒の 3 つ

2 回目 … 赤、白、黒の 3 つ

よって、起こりうるすべての結果の数は

$$3^2 = 3 * 3 = 9 \text{ (通り)}$$

ですわ。続いて 2) についてですが、「取り出した玉の色が赤と黒である」という出来事、これはつまり「1 回目に赤、2 回目に黒」という結果と「1 回目に赤、2 回目に黒」という結果の 2 つが含まれているということです。仮に「取り出した玉の色が赤と黒である」という出来事を S とでもしておくと、

$$S = \{\text{赤-黒, 黒-赤}\}$$

と表すことができますね。それで「取り出した玉の色が赤と黒である確率」は

$$\frac{2}{9} = 0.2222222$$

となります。

ここで1つ注意すべきことがあります。今回の例は**復元抽出**とあって、繰り返し同じ玉を取り出すことができるという条件のもとで行いました。この場合は上述したように3面のサイコロを2回振ったとしてもよいのですが、**非復元抽出**の場合はサイコロと同じと考えてはいけません。

非復元抽出とは同じ玉を繰り返し取ってははいけません。つまり、1度目に取った玉を袋の中に戻さないということです。だから、**1回目に赤玉を取ったら2回目には赤玉はもうない**のです（2回目には白玉か黒玉のどちらかを取るしかない）。

#### 「色のついた玉」問題を考える上での注意!!

- ・ 第一に復元抽出なのか非復元抽出を考えよう。
- ・ 復元抽出の場合はサイコロをイメージして考える。
- ・ 非復元抽出の場合はサイコロをイメージしてはいけません。

**練習問題** 袋の中に赤玉が3つ、白玉が2つ、黒玉が1つ入っている。この袋から2つの玉を取り出すという実験をした場合、以下の問いに答えよ。ただし、袋の中に入っている玉はすべて同じ形状、同じ材質で作られているため、手触りや重さでは判断できない。

- 1) 復元抽出である場合において、起こりうるすべての結果の数は？
- 2) 非復元抽出である場合において、起こりうるすべての結果の数は？
- 3) 復元抽出で取り出したとして、その玉が赤玉と黒玉である確率は？
- 4) 非復元抽出で取り出したとして、その玉が赤玉2つである確率は？
- 5) 復元抽出と非復元抽出の両方で行った場合に白玉が1つ、黒玉が1つである確率は？

**解答** 1)は復元抽出なのだから、サイコロをイメージしてみれば分かりやすい。ただし、赤が3つ、白が2つ、黒が1つなので、赤の面が3面、白の面が2面、黒の面が1面であるサイコロとして考えよう。このサイコロを2回振ることを考えるわけだから、

1回目の試行で起こりうる結果の数 … 赤<sub>1</sub>,赤<sub>2</sub>,赤<sub>3</sub>,白<sub>1</sub>,白<sub>2</sub>,黒の6つ

2 回目の試行で起こりうる結果の数 … 赤<sub>1</sub>,赤<sub>2</sub>赤<sub>3</sub>,白<sub>1</sub>,白<sub>2</sub>,黒の 6 つ

となる。よって,起こりうるすべての結果の数は

$$6^2 = 6 * 6 = 36$$

です。一方,2)の場合は非復元抽出なのでサイコロをイメージすると逆に分かりにくい。もしサイコロをイメージするのであれば,例えば 1 回目に赤という面が出たら,2 回目には赤という面が 1 つ無くなった「赤 2 面,白 2 面,黒 1 面で構成された 5 面サイコロ」を使うのだと考える必要がある。でもそうすると,やはり分かりにくくなってしまっているのでサイコロに例えるのはやめよう。

それで素直に考えると,起こりうるすべての結果の数は

1 回目の試行で起こりうる結果の数 … 赤<sub>1</sub>,赤<sub>2</sub>赤<sub>3</sub>,白<sub>1</sub>,白<sub>2</sub>,黒の 6 つ

2 回目の試行で起こりうる結果の数

1 回目に黒以外の玉をとった場合 :

1 回目に赤をとった場合 … 赤<sub>1</sub>,赤<sub>2</sub>,白<sub>1</sub>,白<sub>2</sub>,黒の 5 つ

1 回目に白をとった場合 … 赤<sub>1</sub>,赤<sub>2</sub>赤<sub>3</sub>,白<sub>1</sub>,黒の 5 つ

1 回目に黒の玉をとった場合 … 赤<sub>1</sub>,赤<sub>2</sub>赤<sub>3</sub>,白<sub>1</sub>,白<sub>2</sub>の 5 つ

であるから,いずれの場合においても,起こりうる結果の数は

$$6 * 5 = 30$$

となります。

**3)の答え** 「赤玉と黒玉である」という出来事 S は

$$S = \{\text{赤}_1\text{黒}, \text{赤}_2\text{黒}, \text{赤}_3\text{黒}, \text{黒赤}_1, \text{黒赤}_2, \text{黒赤}_3\}$$

であり,これに含まれる結果の数は 6 つですから,求める確率は

$$\frac{6}{36} = 0.1666667$$

となります。

4)の答え 「赤玉が2つである」という出来事Sは

$$S = \{\text{赤}_1 \text{赤}_2, \text{赤}_1 \text{赤}_3, \text{赤}_2 \text{赤}_1, \text{赤}_2 \text{赤}_3, \text{赤}_3 \text{赤}_1, \text{赤}_3 \text{赤}_2\}$$

であり、これに含まれる結果の数は6つですから、求める確率は

$$\frac{6}{30} = 0.2$$

となります。

5)の答え 「白玉が1つ、黒玉が1つである」という出来事Sは

$$S = \{\text{白}_1 \text{黒}, \text{白}_2 \text{黒}, \text{黒白}_1, \text{黒白}_2\}$$

であり、これに含まれる結果の数は4つですから、求める確率は

復元抽出の場合：

$$\frac{4}{36} = 0.1111111$$

非復元抽出の場合：

$$\frac{4}{30} = 0.1333333$$

となります。