

## 確率論入門 「2つの出来事を考える」

### 互いに排反である場合の加法定理

早速ですが次の問題を考えてみましょう。

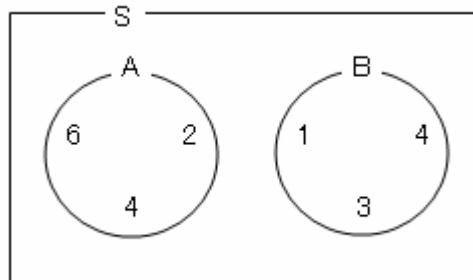
**例題** 1つのサイコロを振るとき,起こりうる結果の数を述べよ。また,出目が偶数であるという出来事と奇数であるという出来事を述べよ。

**解答** まずは試行によって生じる結果の数は1から6までの6つですね。つぎに出目が偶数であるという出来事は{2, 4, 6}であり,出目が奇数であるという出来事は{1, 3, 5}です。結果の数をS,偶数である出来事をA,奇数である出来事をBとしてまとめておきます。

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$A = \{2, 4, 6\}$$

$$B = \{1, 3, 5\}$$



偶数であるという出来事と奇数であるという出来事は互いに排反です。なぜなら,偶数の目が出たときに,同時に奇数の目が出るなんてことは在り得ないからです。逆に奇数の目が出たときも同時に偶数の目が出ることはありません。

ここでさらに次のような確率を考えてみます。

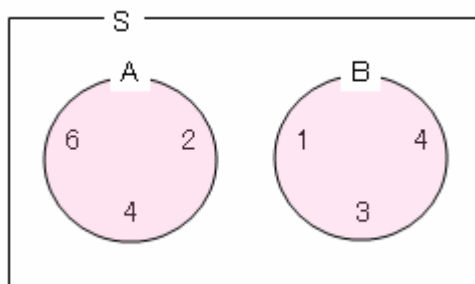
$$P(A \cup B)$$

??? 何だか変な記号が出てきました。上の式の意味は「A または B である確率」

という意味です。上のベン図（四角のなかに 2 つ丸が描いてある絵のこと）において、「A または B である」という出来事は「偶数または奇数である」という出来事ですよ。つまりはすべての目のいずれかが出る確率なわけです。サイコロを振る以上、いずれかの目が必ず出る（起きる）のですから、考えずともこの確率は 1 であるとわかります。それでも一応、計算してみると

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{3}{6} + \frac{3}{6} = 1$$

となります。これは**加法定理**と呼ばれているもので、A という出来事と B という出来事が互いに排反であるときは A が起きる確率と B が出る確率を足しなさいよ、というものです。まあ、これは感覚的に分かりますよね？ 下のベン図において、**求める確率は 2 つのピンク色の丸の面積である**、と考えれば円 A と円 B の面積を足せばよいわけですからね。



### 互いに排反でない場合の加法定理 + 条件つき確立と乗法定理

さらにもう 1 つ違った問題を考えてみましょう。

**例題** 上の例題において、偶数である出来事 A は {2, 4, 6} であった。これに加えて出目が 4 以下であるという出来事 C を述べよ。また  $P(A \cup C)$  および  $P(A \cap C)$  を求めよ。

**解答** まずは出目が 4 以下であるという出来事 C は

$$C = \{1, 2, 3, 4\}$$

ですね。これが分かったら、出来事 A と出来事 C をベン図にしてみましょう。そうしたら、まずは  $P(A \cup C)$  を考えてみましょう。これも考え方は前回と同じで、円 A の面積と円 C の面積を足してあげればよいのです。ただし、今回の場合は**円 A と円 C の 2 つの円が重なりあ**

ている部分がありますから、その部分を最後に引いてあげる必要があります( 図 A を参照 )。

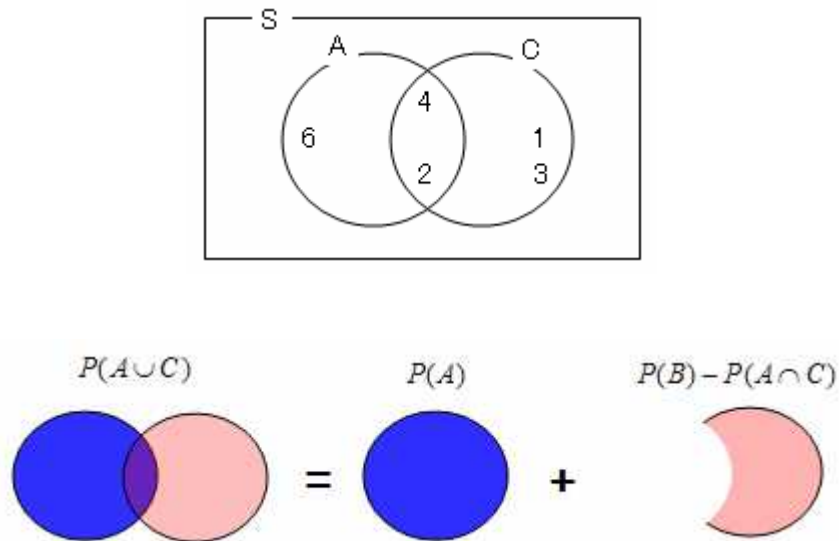


図 A. 排反でない場合の加法定理

さてここでまた新たな記号(数式)が出てきました。 $P(A \cap C)$ というやつですが、これは「AかつCである確率」という意味です。つまり「偶数であり、かつ、4以下である」という出来事が起きる確率であることを意味しています。これを求めるためには条件つき確率という考え方を導入する必要があります。

### 条件つき確率とは

条件つき確率とは「ある出来事が起きたというなかで、さらに違う出来事が起きた確率」というものです。もう少し分かりやすくイメージしてみると、「群馬県内での交通事故という出来事のなかで、さらに前橋市内での交通事故という出来事が起きた確率」といえます( 図 B 参照 )。

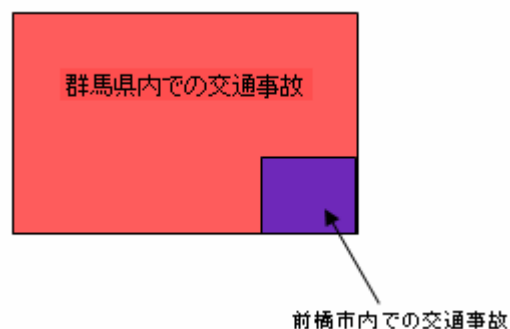


図 B. 条件つき確率のイメージ

それで、この条件つき確率。群馬県内での交通事故という出来事を A、前橋市内での交通事故という出来事を B とした場合、「群馬県内で交通事故が起きたという確率のもとで、前橋市内で交通事故が起きたという確率」を

$$P(B|A)$$

と表します。そしてこれは

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

で求めることができます。要するにこの条件つき確率は **A という出来事の中での出来事 B の割合**と考えることができます。P(A)における P(A∩B)の割合なのです。さらにここから、

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A)$$

という式が導けます。これがいわゆる**乗法定理**というやつです。

ここで改めて問題を考えてみましょう。求めるものは P(A∪C) および P(A∩C) でしたね。

P(A∪C) について、 $P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C)$  なのですから、まずは P(A∩C) を求める必要があります。P(A∩C) すなわち A かつ B である出来事は「偶数であり、かつ 4 以下である」という出来事ですから、

$$\{2, 4\}$$

ですね。結果の数は 6 なのですから、

$$P(A \cap C) = \frac{2}{6} = 0.3333333$$

となります。したがって、

$$P(A \cup C) = \frac{3}{6} + \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = 0.6666667$$

であることが分かります。

問題にはありませんが、せっかく勉強したのでですから  $P(C|A)$  も計算してみましょう。

$$P(C|A) = \frac{P(A \cap C)}{P(A)} = \frac{2/6}{3/6} = 0.6666667$$