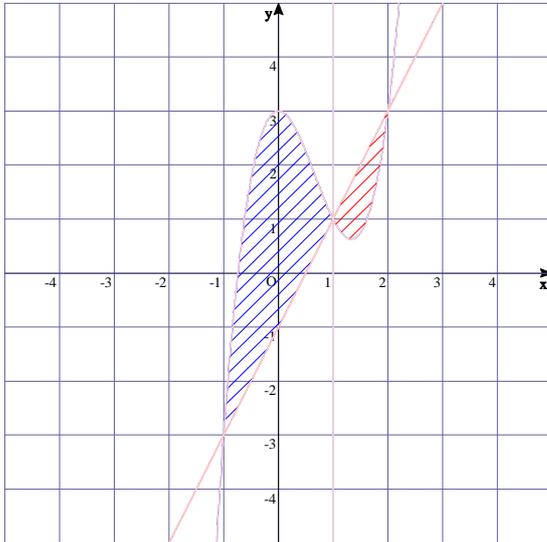


# ちょっと厄介者です



3次関数のグラフ ( $y = 2x^3 - 4x^2 + 3$ ) と1次関数のグラフ ( $y = 2x - 1$ ) に囲まれた部分の面積を求めます。

図をみると難しそうですが、やり方は**積分範囲を別けて、それぞれの面積を足す**だけです。

実際には、自分で**グラフを描いて、グラフの概要をつかんでおく**必要があります。そして、**積分範囲を知っておかなければなりません**。積分範囲 (交点の座標) は図を描けば簡単

にわかりますが、交点の座標 (x 座標のみでいい) が今回のように図だけでは分からないときがあります。そういう時は、2つの式を = (イコール) で結んでやって、因数分解してあげれば求められます。

## 《グラフの概要をつかむ (x 軸との交点を求める)》

x 軸との交点を求めるには、式を因数分解してあげます。

$$y = 2x^3 - 4x^2 + 3 = 2x(x^2 - 2x) + 3$$

ここまでやれば + 3 のところに頭があって、x 軸との交点は1つで右上がりになっているということが分かります (慣れればわかるようになります)。もう少し正確に言うと、ポイントは2つあって、1つは “ + 3 ” の部分でこれは頭がどこにあるかを示しています。つまり、もし “ + 3 ” が “ - 1 ” なら頭は - 1 になります (図.1)。

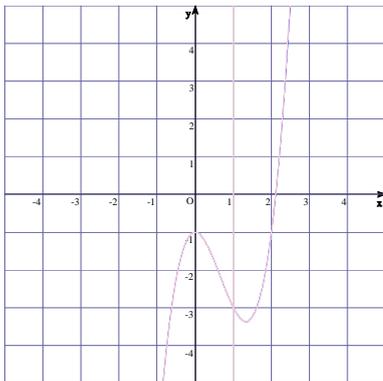


図.1 頭の位置

さらに、“  $2x^3$  ” の部分は “ 右上がり ” かどうかを示していて、仮に “  $-2x^3$  ” となっていたら、グラフは右下がりのグラフになります (図.2)。

この2つのポイントを分かっていたら、だいたいグラフがどうなっているかが分かるのです。ちなみに、“  $-4x^2$  ” の部分は曲線の歪み具合を表していて、数字が大きいくほど歪みが大きくなります (図.3)。

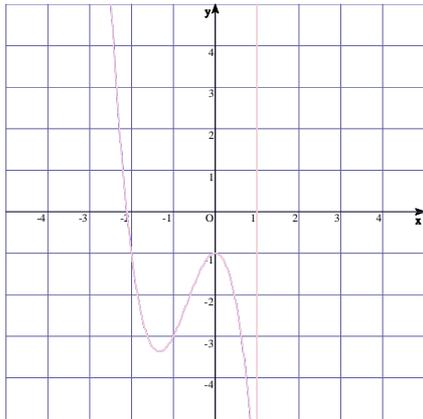


図.2 右上がり・右下がり

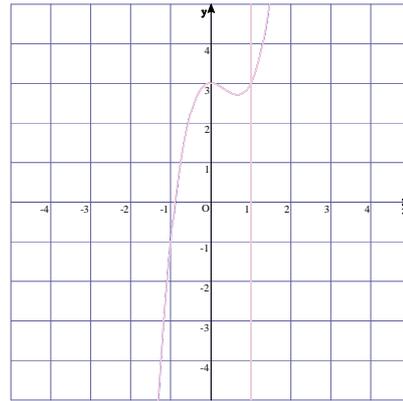


図.3 グラフの歪み具合

### 《積分範囲を求める（グラフの交点を求める）》

グラフの交点を求めるには2つの式を = (イコール) で結んでやって、因数分解します。

$$2x^3 - 4x^2 + 3 = 2x - 1$$

$$2x^3 - 4x^2 + 3 - 2x + 1 = 0$$

$$2x^3 - 4x^2 - 2x + 4 = 0$$

$$(x+1)(x-1)(x-2) = 0$$

$$x = -1, 1, 2$$

したがって、 $-1 \sim 1$  と  $1 \sim 2$  が積分範囲となります。

### 【左半分（青の部分）の面積】

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \{ (2x^3 - 4x^2 + 3) - (2x - 1) \} dx &= \int_{-1}^1 2x^3 - 4x^2 - 2x + 4 dx \\ &= \left[ \frac{2}{3+1} x^{3+1} - \frac{4}{2+1} x^{2+1} - \frac{2}{1+1} x^{1+1} + 4x \right]_{-1}^1 = \left[ \frac{1}{2} x^4 - \frac{4}{3} x^3 - x^2 + 4x \right]_{-1}^1 \\ &= \left( \frac{1}{2} - \frac{4}{3} - 1 + 4 \right) - \left( \frac{1}{2} + \frac{4}{3} - 1 - 4 \right) = \left( \frac{3-8-6+20}{6} \right) - \left( \frac{3+8-6-20}{6} \right) \\ &= \left( \frac{9}{6} \right) - \left( -\frac{15}{6} \right) = 4 \end{aligned}$$

【右半分（赤の部分）の面積】

$$\begin{aligned} \int_1^2 2x - 1 - (2x^3 - 4x^2 + 3) dx &= \int_1^2 -2x^3 + 4x^2 + 2x - 4 dx \\ &= \left[ -\frac{1}{2}x^4 + \frac{4}{3}x^3 + x^2 - 4x \right]_1^2 = \left( -8 + \frac{32}{3} + 4 - 8 \right) - \left( -\frac{1}{2} + \frac{4}{3} + 1 - 4 \right) \\ &= \frac{-24 + 32 + 12 - 24}{3} - \left( \frac{-3 + 8 + 6 - 24}{6} \right) = -\frac{4}{3} + \frac{13}{6} = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

したがって、 $4 + \frac{5}{6} = \frac{29}{6} = 4.833333$

### ちょこっとポイント!!

3次方程式を解くための便利な方法 因数定理

$$2x^3 - 4x^2 + = 2x - 1$$

$$2x^3 - 4x^2 + 3 - 2x + 1 = 0$$

$$2x^3 - 4x^2 - 2x + 4 = 0$$

$$(x+1)(x-1)(x-2) = 0$$

$$x = -1, 1, 2$$

上の式で、 $2x^3 - 4x^2 - 2x + 4 = 0$ から $(x+1)(x-1)(x-2) = 0$ になったのが、なぜだか分からないと思います（最初はですが）。実はこれ、因数定理という公式みたいのを使っているんです。

因数定理とは、

まず、 $f(x) = 2x^3 - 4x^2 - 2x + 4$ とおきます。

次に、 $x$ にある数を代入して0になる数を見つけます。この場合は、

$$f(1) = 2 - 4 - 2 + 4 = 0$$

となります。つまりこれは、 $2x^3 - 4x^2 - 2x + 4$ は $(x-1)$ で割り切れるということなのです。計算する際にはあらかじめ2でくくっておきます。少し解の部分がずれてしまいましたが、

$$\begin{array}{r} x^2 - x - 2 \\ x-1 \overline{) x^3 - 2x^2 - x + 2} \\ \underline{x^3 - x^2} \phantom{+ 2} \\ -x^2 - x \phantom{+ 2} \\ \underline{-x^2 + x} \phantom{+ 2} \\ -2x + 2 \phantom{+ 2} \\ \underline{-2x + 2} \\ 0 \end{array}$$

となり、したがって、 $x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$ と因数分解できます。よって、 $(x-1)(x+1)(x-2) = 0$ となるわけです。