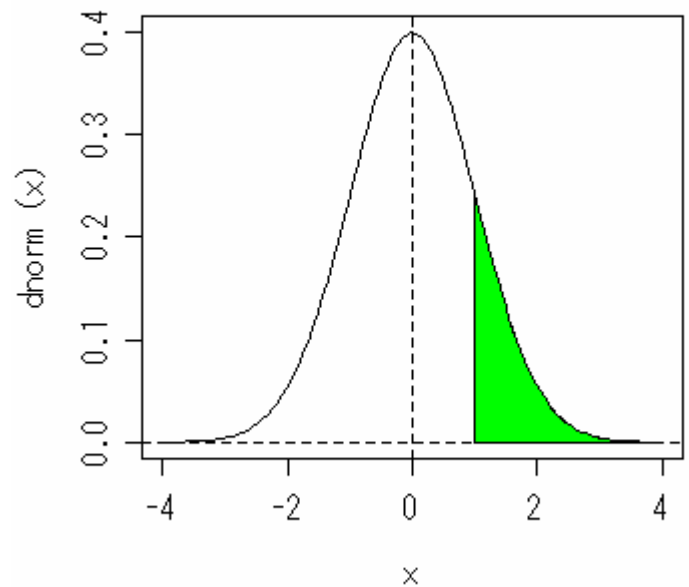
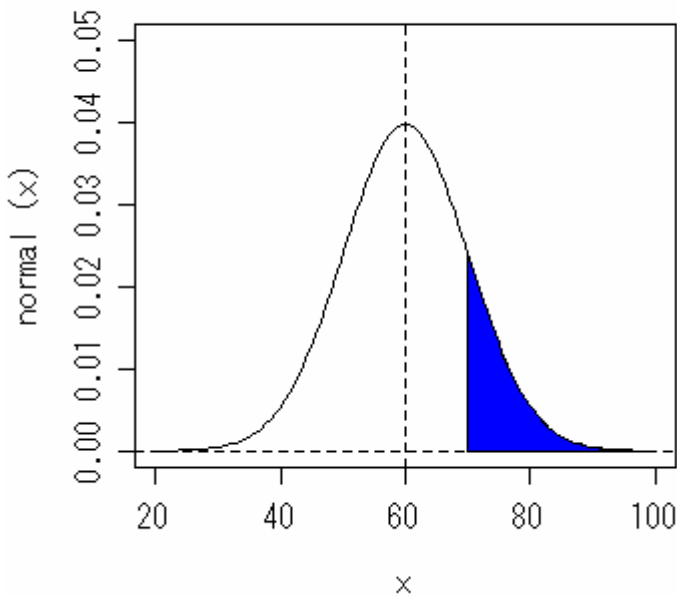


正規分布を利用すると下の問題のように、全体の割合や合格に必要な得点などを予測することができます。

例題 ある大学の入試結果は平均 60 点、標準偏差 10 点の正規分布にしたがっている。このとき、(1)70 点以上の学生の割合を求めなさい。また、(2)受験者は 5 万人であったが、上から 1 万人目の学生の得点はどのくらいであるかを求めなさい。

解答 $X \sim N(60, 10^2)$ の正規分布に従っています。

(1)については、70 点以上ですから $P\{X > 70\}$ として考えればよいわけです。 $X \sim N(60, 10^2)$ に従うとき、 $P\{X > 70\}$ が表す面積部は下図-左のようになります。これを標準化すると $P\{X > 70\} = P\left\{Z > \frac{70-60}{10}\right\} = P\{Z > 1\}$ となり、 $P\{Z > 1\}$ の表す面積部を求めればよいわけです（下図-右）。



さて、右図の緑部分の面積を求めればよいわけですから、 $\int_0^{\infty} f(x)dx - \int_0^1 f(x)dx = 0.5 - 0.3413 = 0.1587$ となり、答えは 0.1587 で **15.87%の生徒が 70 点以上の得点を取っている**ということになります。

(2)について説明します。まず、5 万人のうちの 1 万人ですから $\frac{10000}{50000} = 0.2$ (20%) となります。つまり、

標準正規分布で上側確率 0.2 となるとき面積を調べます（答えは 0.842）。そこから $0.842 = \frac{X-60}{10}$ という式を立てて、これを解くと $X - 60 = 0.842 \times 10$, $X = 68.4$ となり、**上から 1 万人目の学生の得点は 68 点から 69 点と推定することができます。**

以下、練習問題をいくつか挙げておきます。

練習問題 ある学校の男子学生 8000 人の身長が、平均 175.26cm、標準偏差 7.62cm の正規分布に従うとき、182.88cm 以上の学生は全体の何%で何人いるかを求めなさい。

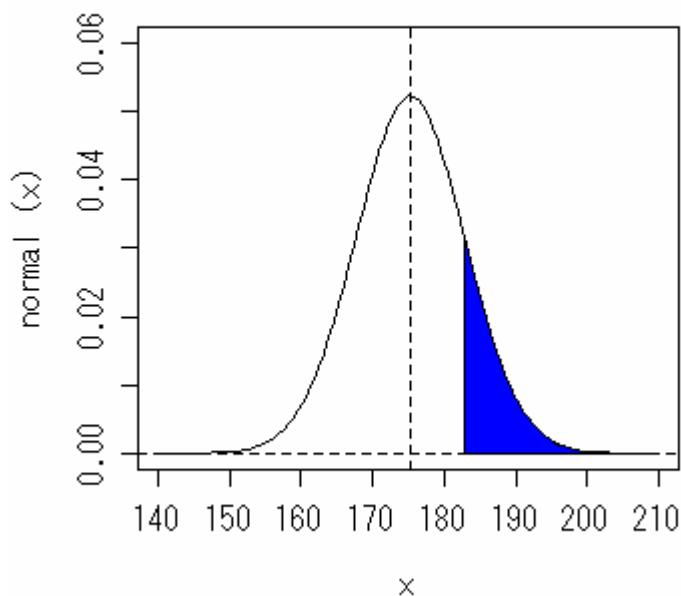
練習問題 200 点満点のテストを 5000 人に行ったところ、結果は平均 123.5 点、標準偏差 21.3 点の正規分布に従っていた。このとき、(1)180 点以上取った学生は何人いるかを求めなさい。また、(2)50 点以上 100 点以下の生徒は何人いるかを求めなさい。

練習問題 缶ジュース 200 個の内容量の平均が 150.3g、標準偏差が 5g の正規分布に従うとき、(1)内容量の多いほうから 50 番目の缶の内容量はどれくらいか。また、(2)内容量の多いほうから 5%の重さはどのくらいか。

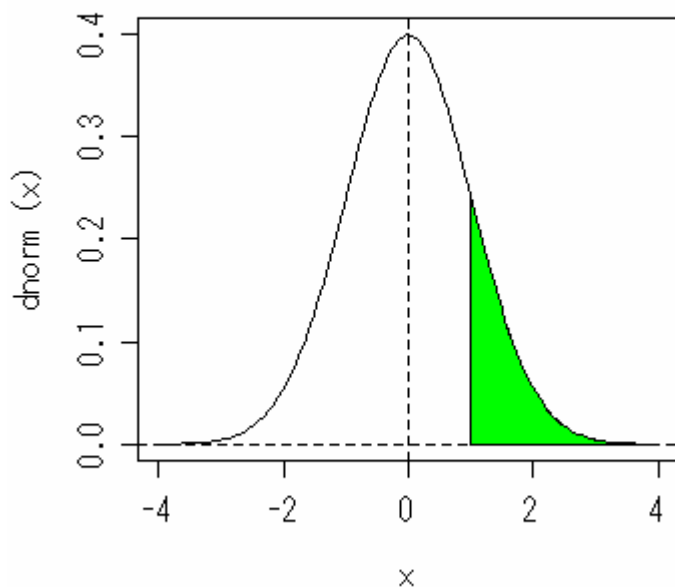
練習問題 ある模擬試験に 5000 人が受験したところ、その成績は平均 65 点、標準偏差 10 点の正規分布に従っていた。このとき、(1)ある生徒が 75 点以上 85 点以下である確率を求めなさい。また、(2)上位 5%に入るためには何点以上あればよいか。さらに、(3)順位が 100 位以内に入るためには何点以上が必要かを求めなさい。

解答

$$P\{X > 182.88\}$$



$$P\{Z > 1\}$$



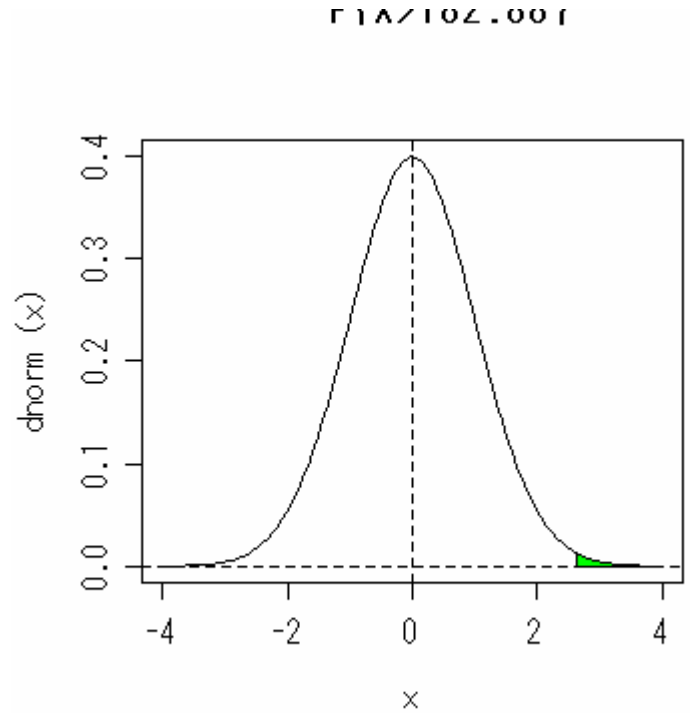
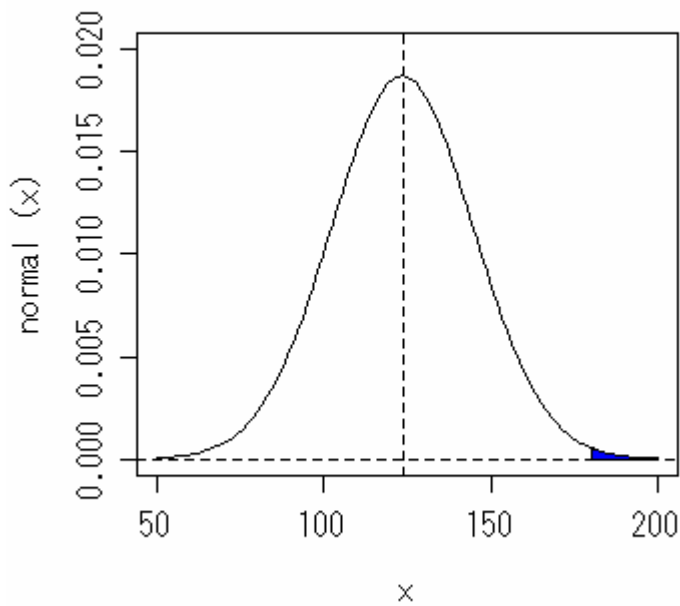
$X \sim N(175.26, 7.62^2)$ に従う、

$$P\{X > 182.88\} = P\left\{Z > \frac{182.88 - 175.26}{7.62}\right\} = P\{Z > 1\}$$

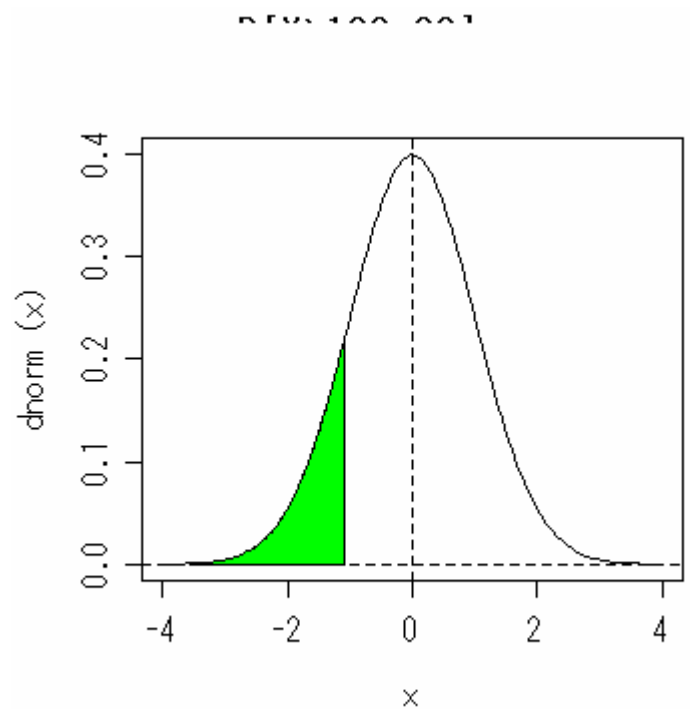
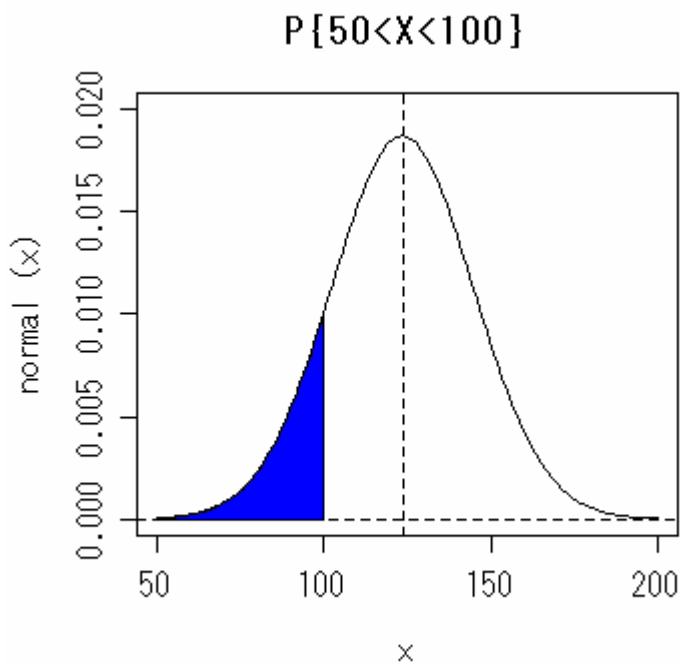
$$\int_0^\infty f(x)dx - \int_0^1 f(x)dx = 0.5 - 0.3413 = 0.1587 \quad 0.1587 \times 100 = 15.87(\%) \quad 8000 \times 0.1587 = 1269.6$$

したがって、182.88cm以上の学生は全体の15.87%で約1269人いると推定できる。

解答



求めるのは緑色の部分ですが、この図を見ただけで180点以上を取っているひとはほとんどいないということが分かりますね。



緑色の部分を見ると、大体、半分(2500人)の3分の1位ですから500人くらいはいるのではないかということが、この図だけで予測することができます。

以下、(1)と(2)の計算結果です。

$X \sim N(123.5, 21.3)$ に従う、

$$P\{X > 180\} = P\left\{Z > \frac{180 - 123.5}{21.3}\right\} = P\{Z > 2.6526\}$$

$$\int_0^{\infty} f(x)dx - \int_0^{2.6526} f(x)dx = 0.5 - 0.4960 = 0.004$$

$$5000 \times 0.004 = 20(\text{人})$$

$$P\{50 < X < 100\} = P\left\{\frac{50 - 123.5}{21.3} < Z < \frac{100 - 123.5}{21.3}\right\} = P\{-3.4507 < Z < -1.1033\}$$

$$\int_{-3.4507}^{-1.1033} f(x)dx = \int_{-\infty}^0 f(x)dx - \int_{-1.1033}^0 f(x)dx = \int_0^{\infty} f(x)dx - \int_0^{1.1033} f(x)dx = 0.5 - 0.3643 = 0.1357$$

$$5000 \times 0.1357 = 678.5(\text{人})$$

したがって、180点以上取った人は20人、50点以上100点以下のひとは678人程度いることが推定できる。

解答

内容量の多いほうから50番目の内容量ということは、つまり $\frac{50}{200} = 0.25$ となるので、**上側確率 0.25 に対する値**を読み取って(上側確率に対する値) = $\frac{X - (\text{平均})}{(\text{標準偏差})}$ の公式に当てはめれば求められます。内容量の

多いほうから5%の重さについても、同じように**上側確率 0.05 に対する値**を読み取ってから上の公式に当てはめてあげればよいわけです。実際に計算してみると、

$X \sim N(150.3, 5^2)$ に従う、

$$0.674 = \frac{X - 150.3}{5}, X - 150.3 = 0.674 \times 5, X = 153.67(\text{g})$$

$$1.645 = \frac{X - 150.3}{5}, X - 150.3 = 1.645 \times 5, X = 158.525(\text{g})$$

したがって、内容量の多いほうから50番目の缶の内容量は153g程度であることが推定できる。

さらに、内容量の多いほうから5%の重さは158g程度であることが推定できる。

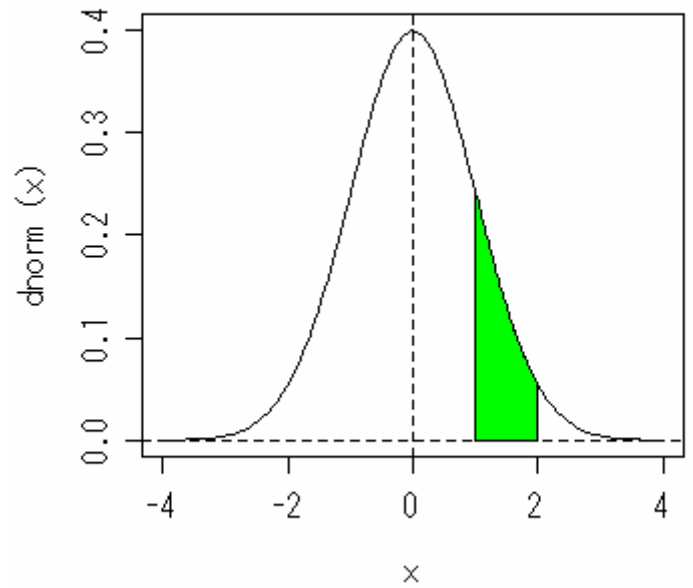
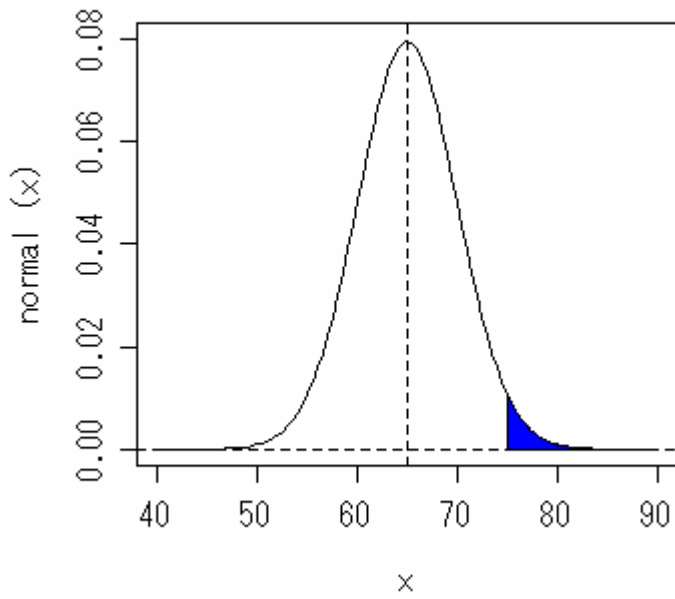
解答

75点以上85点以上である確率を求めるわけですから、75~85までの面積(下図の青部分)を求めればよいわけです。当然、標準化する必要がありますから最終的には $P\{1 < Z < 2\}$ の範囲の面積(下図の緑部分)を求めることになります。

$$P\{75 < X < 85\} = P\left\{\frac{75 - 65}{10} < Z < \frac{85 - 65}{10}\right\} = P\{1 < Z < 2\}$$

$$\int_0^2 f(x)dx - \int_0^1 f(x)dx = 0.4772 - 0.3413 = 0.1359$$

$$P\{75 < X < 85\}$$



次に上位 5% (0.05) に入るためには何点以上あればよいかを求めますが、これはつまり上側確率 0.05 に対する値を読み取って計算するわけです。(3)も同様に上側確率 $\frac{100}{5000} = 0.02$ に対する値を読み取って計算することになります。以下はその計算結果です。

$$1.645 = \frac{X - 65}{10}, X - 65 = 1.645 \times 10, X = 81.45(\text{点})$$

$$2.054 = \frac{X - 65}{10}, X - 65 = 2.054 \times 10, X = 85.54(\text{点})$$

以上の結果から、75 点以上 85 点以下である確率は 13%、上位 5%に入るためには 81 点以上必要となり、100 位以内になるには 85 点以上必要であると推定できる。